Mathesis Nazionale – Scuola Estiva – Telese 27-30 luglio 2015

Alcune questioni di Algebra

Alessio Russo

Seconda Università di Napoli, alessio.russo@unina2.it

1. Consideriamo il numero $\boldsymbol{p=127}$. Tale numero determina il polinomio $\boldsymbol{f=x^2+2x+7}$. Studiare l'irriducibilità di $\boldsymbol{f}$ in $\boldsymbol{Z[x]}$, $\boldsymbol{Q[x]}$, $\boldsymbol{R[x]}$ e in $\boldsymbol{C[x]}$. Fare lo stesso partendo dal numero $\boldsymbol{p=163}$. Cosa si conserva e cosa cambia rispetto al caso precedente?

   - Provare a generalizzare le considerazioni precedenti.

   Hint: Sia $\boldsymbol{p=abc}$ un numero primo di tre cifre (in base 10). Sia poi $\boldsymbol{f=ax^2+bx+c}$ il polinomio avente per coefficienti le cifre di $\boldsymbol{p}$. Ovviamente, $f(10)=p$. Si supponga che $f=(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)$ con a_1x+b_1 e a_2x+b_2 polinomi appartenenti a $Z[x]$. Allora $p=(a_1 10+b_1)(a_2 10+b_2)$ e quindi …. . Osservare che l'irriducibilità di f in $Z[x]$ è equivalente a quella in $Q[x]$, mentre ….. .

   - E' possibile generalizzare *ulteriormente* ?
   - Riflettere sulla definizione generale di polinomio irriducibile, soffermandosi, in particolare, sull'irriducibilità negli anelli di polinomi $\boldsymbol{Z[x]}$, $\boldsymbol{Q[x]}$, $\boldsymbol{R[x]}$, $\boldsymbol{C[x]}$**.**
   - Studiare il problema dell'irriducibilità in $\boldsymbol{Z[x]}$, $\boldsymbol{Q[x]}$, $\boldsymbol{R[x]}$, $\boldsymbol{C[x]}$ relativamente al polinomio $\boldsymbol{x^4+1}$**.**

2. Si consideri il polinomio (di *Eulero*) $\boldsymbol{f=x^2-x+41}$. Allora per ogni $n\in\{1,2,\dots,40\}$ $f(n)$ è primo. D'altra parte, $f(41)=41^2$. *Se si sostituisce 41 con 2, 3, 5, 11 e 17 si ha un analogo fenomeno.* Si osservi che $f(1-x)=f(x)$, sicché per ogni intero negativo n maggiore di -39, si ha che $f(n)$ è primo. Si potrebbe verificare che tra i primi 10 milioni di valori assunti da f circa un terzo è costituito da numeri primi. *Perché f ha un comportamento così speciale?* (**Hint:** Si riguardi f come polinomio su $\boldsymbol{R}$. Il suo discriminante è **-163**. Il numero **163 ha una particolarità. Quale? cfr. K. Devlin, Dove va la Matematica, Boringhieri**).

Supponiamo che f sia un polinomio a coefficienti interi tale che $f(a)$ è primo per ogni intero a. Cosa si può dire su f?

Hint: Poniamo $p=f(1)$. Per ipotesi p è un numero primo e tale è ogni numero $f(1+kp)$, al variare di k nell'insieme dei numeri interi (perché?). D'altra parte, si verifica facilmente (con considerazioni di *aritmetica modulare*) che

$$f(1+kp) \equiv 0 \ (mod p),$$

sicché $f(1+kp)=p$, per ogni intero k. Pertanto il polinomio f-p ha tra le sue radici *ogni* numero del tipo $1+kp$. Da ciò si deduce (utilizzare il *teorema di Cauchy* sul numero delle radici di un polinomio) che ……

3. Utilizzando la *Regola dei Segni di Cartesio* individuare un procedimento per confrontare le radici di un'equazione parametrica di secondo grado

$$f(x,k)=a(k)x^2+b(k)x+c(k)$$

con un fissato numero reale α.

Hint: Si consideri il cambio di variabile $x=t+\alpha$. Resta determinato il polinomio $g(t,k)=a(k)(t+\alpha)^2+b(k)(t+\alpha)+c(k)$. Tale polinomio ha $a(k)$ come coefficiente di t^2, ha $f'(\alpha,k)$ (derivata di f calcolata in α) come coefficiente di t e $f(\alpha,k)$ come termine noto. I tre numeri (funzioni di k) $a(k)$, $f'(\alpha,k)$ e $f(\alpha,k)$ vengono detti *successione di Sturm-Fourier*. Si osservi inoltre, che $g(t,k)$ ha lo stesso discriminante di $f(x,k)$. Poiché $t=x-\alpha$, allora confrontare le radici di f con α è equivalente a stabilire il segno delle radici di $g(x,k)$.

Pertanto, f ha tante radici maggiori (rispettivamente, minori) di *α quante sono le …… (rispettivamente, le …..) che presenta la successione di Sturm-Fourier.*

- Applicando il ***Metodo di Sturm-Fourier*** *confrontare il numero -2 con le radici della seguente equazione parametrica di secondo grado:*
$$x^2-2x+k-3=0.$$
- Fare una ricerca storica (in rete può trovare del materiale) sulla *Regola di Cartesio* (1637) e le sue dimostrazioni per un generico polinomio.

4. **(Approfondimento)** Sia $f=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ un polinomio a coefficienti in un *anello commutativo unitario non nullo A*. E' possibile identificare f con la funzione

$$g: a \in A \rightarrow a_0+a_1a+\ldots+a_na^n \in A \ ?$$

Parole chiave: *polinomio, applicazione polinomiale, principio di identità dei polinomi, esempi, controesempi.*